

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΑΠΟΡΡΟΗΣ ΤΩΝ ΟΜΒΡΙΩΝ ΣΕ ΚΡΙΣΙΜΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΣΦΑΛΕΙΑ ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΤΩΝ ΟΔΙΚΩΝ ΧΑΡΑΞΕΩΝ

Ν. Ε. Ηλιού

Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Γ. Δ. Καλιαμπέτσος

Επιστημονικός Συνεργάτης Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Σχεδιασμός, Χάραξη, Απορροή ομβρίων, Υδρολίσθηση

ΠΕΡΙΛΗΨΗ: Το θέμα της απορροής των ομβρίων στις καμπύλες περιοχές των οδών είναι μείζονος σημασίας, γιατί υπό συνθήκες συμβάλλει τόσο στην εμφάνιση του φαινομένου της υδρολίσθησης όσο και της παγοπληξίας. Στις Οδηγίες Μελετών Οδικών Έργων, με σκοπό την καλή απορροή του οδοστρώματος, προτείνεται η κατά μήκος κλίση της οδού να μην είναι μικρότερη από την πρόσθετη κλίση των οριογραμμών ή καλύτερα η διαφορά $s-\Delta s$ να είναι τουλάχιστον 0,5%. Είναι σημαντικό ο συνδυασμός οριζόντιας και κατακόρυφης χάραξης να είναι τέτοιος ώστε να αποφεύγονται μικρές τιμές στις συνιστάμενες κλίσεις. Ο έλεγχος πρέπει να γίνεται σε κάθε διατομή, σε κάθε χιλιομετρική θέση. Στην παρούσα εργασία γίνεται διερεύνηση των τιμών που παίρνει η συνισταμένη κλίση σε κρίσιμες περιοχές του οδοστρώματος. Επισημαίνονται με παραδείγματα και αναλυτικές σχέσεις οι κρίσιμες ζώνες κακής απορροής.

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το θέμα της απορροής των ομβρίων στις καμπύλες περιοχές των οδών είναι μείζονος σημασίας, γιατί υπό συνθήκες συμβάλλει τόσο στην εμφάνιση του φαινομένου της υδρολίσθησης όσο και της παγοπληξίας. Στις Οδηγίες Μελετών Οδικών Έργων, με σκοπό την καλή απορροή του οδοστρώματος, προτείνεται η κατά μήκος κλίση της οδού να μην είναι μικρότερη από την πρόσθετη κλίση των οριογραμμών. Θεωρείται μάλιστα αναγκαίο ή καλύτερο η διαφορά $s-\Delta s$ να είναι τουλάχιστον 0,5%.

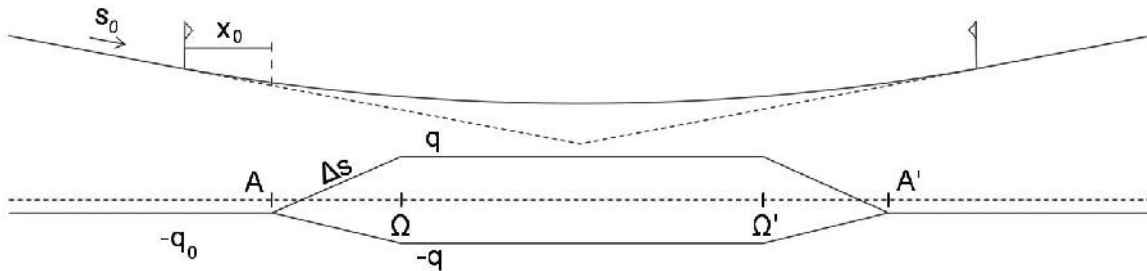
Η επιλογή κατά μήκος κλίσεων, μεταξύ των σημείων θλάσης της μηκοτομής, που να υπακούουν στον παραπάνω κανόνα δεν διασφαλίζει την καλή απορροή. Πρέπει η ίδια συνθήκη να ισχύει και στα τόξα συναρμογής της μηκοτομής. Έτσι ώστε σε καμία από τις δύο οριογραμμές του οδοστρώματος (και σε κανένα σημείο) να μην εμφανιστεί αντίθετη κλίση από την κατά μήκος κλίση του άξονα περιστροφής της οδού.

Είναι σημαντικό ο συνδυασμός οριζόντιας και κατακόρυφης χάραξης να είναι τέτοιος ώστε να αποφεύγονται μικρές τιμές στις συνιστάμενες κλίσεις. Ο έλεγχος πρέπει να γίνεται σε κάθε διατομή, σε κάθε χιλιομετρική θέση.

Στην παρούσα εργασία γίνεται διερεύνηση των τιμών που παίρνει η συνισταμένη κλίση σε κρίσιμες περιοχές του οδοστρώματος. Η κλίση αυτή υπολογίζεται αναλυτικά για όλο το πλάτος του δρόμου και όχι σαν μια λοξή κλίση ανά χιλιομετρική θέση (συνδυασμός κατά μήκος κλίσης και επίκλισης).

2 ΣΥΝΙΣΤΑΜΕΝΗ ΚΛΙΣΗ ΟΔΟΣΤΡΩΜΑΤΟΣ

Επιλέγεται για μελέτη μια περιοχή του οδοστρώματος, που χαρακτηρίζεται από ένα συνδυασμό οριζόντιας και κατακόρυφης χάραξης, η οποία υπό προϋποθέσεις μπορεί να οδηγήσει σε όχι καλή απορροή των ομβρίων. Συγκεκριμένα μία καθοδική κατά μήκος κλίση, η οποία βαίνει συνεχώς μειούμενη, συνδυάζεται με την καμπύλη συναρμογής εισόδου της οριζόντιας καμπύλης όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Αποτελεί τη μία από τις δύο κρίσιμες περιοχές που προκύπτουν από τον συνδυασμό οριζόντιας καμπύλης με κοίλη καμπύλη μηκοτομής.



Σχήμα 1: Μηκοτομή και διάγραμμα επικλίσεων

Θα μελετηθεί η συνισταμένη κλίση στο εξωτερικό ρεύμα του τμήματος του οδοστρώματος που αντιστοιχεί στην κλωθοειδή εισόδου. Τα συμπεράσματα που θα προκύψουν μπορούν να εφαρμοστούν ανάλογα και στο αντίστοιχο εξωτερικό ρεύμα του τμήματος του οδοστρώματος που αντιστοιχεί στην κλωθοειδή εξόδου, στην άλλη κρίσιμη περιοχή. Η χάραξη που απεικονίζεται στο Σχήμα 1 είναι συμμετρική ως προς το κέντρο της στροφής όμως η ανάλυση που θα ακολουθήσει δεν έχει σαν προϋπόθεση αυτή την συμμετρία

Επιλέγεται ένα σύστημα συντεταγμένων με τετμημένη x την απόσταση από την αρχή της κλωθοειδούς κατά μήκος του άξονα του δρόμου και τεταγμένη y την εγκάρσια απόσταση από τον άξονα περιστροφής του οδοστρώματος, ο οποίος έχει επιλεγεί, για λόγους απλότητας, να ταυτίζεται με τον άξονα του δρόμου. Η συνισταμένη κλίση σε οποιαδήποτε θέση του οδοστρώματος είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός και εκφράζεται από τη σχέση:

$$\rho_{x,y} = \sqrt{(s_x + \Delta s_y)^2 + q_x^2} \quad (1)$$

όπου s_x είναι η κατά μήκος κλίση του άξονα σε απόσταση x από την αρχή της καμπύλης, Δs_y η πρόσθετη κατά μήκος κλίση σε απόσταση y από τον άξονα, q_x η επίκλιση σε απόσταση x από την αρχή της καμπύλης. Το άθροισμα $s_x + \Delta s_y$ ορίζεται ως η σύνθετη κατά μήκος κλίση οποιουδήποτε σημείου με συντεταγμένες (x,y) . Η πρόσθετη (σε σχέση με τον άξονα) κατά μήκος κλίση στην εξωτερική πλευρά του οδοστρώματος δίνεται (Κανελλαΐδης 2002, ΟΜΟΕ-Χ 2001) από τη σχέση:

$$\Delta s_y = \frac{q + q_0}{L} y \quad (2)$$

όπου $-q_0$ η επίκλιση στην ευθυγραμμία, q η επίκλιση στο κυκλικό τόξο, L το μήκος κλωθοειδούς και y η απόσταση από τον άξονα περιστροφής του οδοστρώματος. Παράλληλα η επίκλιση q_x σε απόσταση x από την αρχή της καμπύλης δίνεται από την σχέση:

$$q_x = -q_0 + \frac{q + q_0}{L} x \quad (3)$$

Η κατά μήκος κλίση s_x σε απόσταση x από την αρχή της κατακόρυφης καμπύλης εκφράζεται (Κανελλαΐδης 2002, ΟΜΟΕ-Χ 2001) από τη σχέση:

$$s_x = s_0 + \frac{x}{R} \quad (4)$$

όπου s_0 η σταθερή κατά μήκος κλίση πριν την κατακόρυφη καμπύλη συναρμογής ακτίνας R . Αν θεωρηθεί ότι η αρχή της κατακόρυφης καμπύλης βρίσκεται σε απόσταση x_0 πριν την αρχή της οριζόντιας καμπύλης συναρμογής, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1, τότε η σχέση (4) παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$s_x = s_0 + \frac{x + x_0}{R} \quad (5)$$

Έχει επιλεγεί αυτή η περίπτωση, να προηγείται η αρχή της κατακόρυφης καμπύλης της αρχής της κλωθοειδούς, ώστε να συνδυάζεται η μεταβλητή επίκλιση με τη μεταβλητή κατά μήκος κλίση για όλο το διάστημα μελέτης. Η περίπτωση σταθερής κατά μήκος κλίσης σε ολόκληρη την κλωθοειδή, η οποία είναι απλούστερη, δεν θα εξεταστεί. Αν η κατά μήκος κλίση είναι σταθερή σε τμήμα μόνο της κλωθοειδούς η μελέτη ανάγεται στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.

Αν υπάρχουν σημεία - θέσεις στα οποία μηδενίζεται η συνισταμένη κλίση, όπως αυτή προκύπτει από τη σχέση (1), αυτά πρέπει να χαρακτηρίζονται από μηδενική επίκλιση και ταυτόχρονα από μηδενική σύνθετη κατά μήκος κλίση ($s_x + \Delta s_y$). Η θέση στην οποία μηδενίζεται η επίκλιση προσδιορίζεται από την τιμή του x στην οποία μηδενίζεται η q_x . Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3) προκύπτει ότι αυτό συμβαίνει σε απόσταση $x = X_c$ από την αρχή της καμπύλης:

$$X_c = \frac{q_0}{q + q_0} L \quad (6)$$

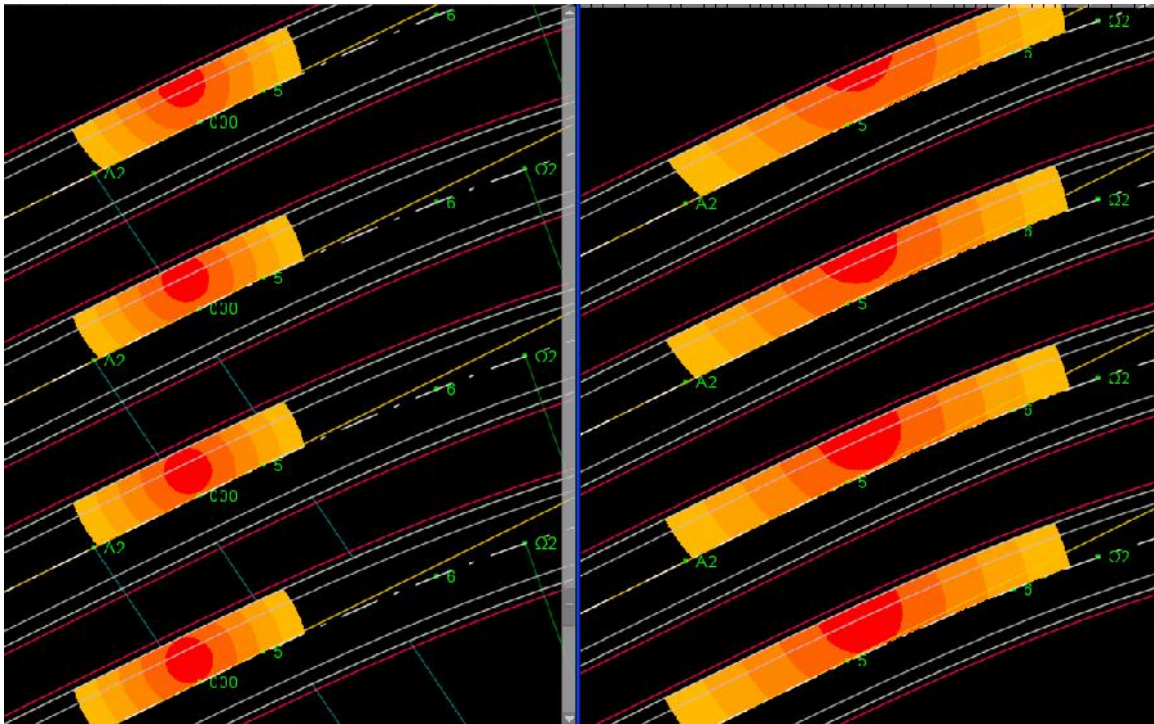
Η θέση στην οποία μηδενίζεται η σύνθετη κατά μήκος κλίση προσδιορίζεται από την τιμή του y στην οποία μηδενίζεται η ($s_x + \Delta s_y$). Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2) και (5) προκύπτει ότι αυτό συμβαίνει σε απόσταση $y = Y_c$ από τον άξονα περιστροφής του οδοστρώματος:

$$Y_c = -\frac{L}{q + q_0} \left(s_0 + \frac{x + x_0}{R} \right) \quad (7)$$

Αυτή είναι μια συνάρτηση που μας δίνει την τιμή της εγκάρσιας απόστασης από τον άξονα των σημείων μηδενισμού της σύνθετης κατά μήκος κλίσης και μόνο. Μας δίνει δε μία τιμή για κάθε χιλιομετρική θέση, όπως αυτή εκφράζεται μέσω της απόστασης x από την αρχή της οριζόντιας καμπύλης. Ο προσδιορισμός του σημείου μηδενισμού της συνισταμένης κλίσης, δηλαδή του σημείου ταυτόχρονου μηδενισμού της επίκλισης και της σύνθετης κατά μήκος κλίσης, γίνεται με αντικατάσταση στην (7) της τιμής του x από την (6). Αυτή μας δίνει τη σχέση:

$$Y_c = -\frac{L}{q+q_0} \left(s_0 + \frac{x_0}{R} + \frac{q_0}{q+q_0} \frac{L}{R} \right) \quad (8)$$

Όταν η τιμή του Y_c , της εγκάρσιας απόστασης που προκύπτει από την παραπάνω σχέση, είναι μεγαλύτερη του μηδενός και μικρότερη του πλάτους του οδοστρώματος τότε υπάρχει σημείο μηδενισμού της συνισταμένης κλίσης. Αυτό το σημείο θα έχει συντεταγμένες (X_c, Y_c) και θα είναι μοναδικό στην περιοχή που εξετάζουμε. Αν δεν υπάρχει, μέσα στα όρια του οδοστρώματος, σημείο με μηδενική συνισταμένη κλίση αυτό δεν σημαίνει ότι το πρόβλημα της απορροής έχει λυθεί. Στο πιο κάτω σχήμα παριστάνεται χρωματικά η τιμή της συνισταμένης κλίσης, με βάση τη σχέση (1), για διαφορετικές περιπτώσεις στις οποίες το σημείο με συντεταγμένες (X_c, Y_c) είναι το κέντρο των εμφανιζόμενων, περίπου κυκλικών, σχηματισμών.



Σχήμα 2. Χρωματική παράσταση της συνισταμένης κλίσης οδοστρώματος

Σε όλους τους δρόμους του παραδείγματος έχει χρησιμοποιηθεί τιμή αρχικής κατά μήκος κλίσης $s_0 = -1\%$, επίκλισης στην ευθυγραμμία $q_0 = -2.5\%$, μήκους κλωθοειδούς $L = 50m$ και απόστασης οριογραμμής από το άξονα $a = 3.75m$. Στους δρόμους που φαίνονται στο αριστερό τμήμα του σχήματος η επίκλιση στο κυκλικό τόξο είναι $q = 7.5\%$ και αντιστοιχεί σε πρόσθετη κλίση οριογραμμών $\Delta s = 0.75\%$ ενώ στους υπόλοιπους αυτή είναι $q = 2.5\%$ και αντιστοιχεί σε $\Delta s = 0.375\%$. Η τιμή του x_0 είναι 0 για τους δρόμους στο επάνω μέρος του σχήματος (τόσο αριστερά όσο και δεξιά) και αυξάνεται σε 32.26m, 62.26m και 82.26m για τους επόμενους. Επίσης οι κατακόρυφες ακτίνες R για τους πρώτους δρόμους είναι 11773m ενώ για τους επόμενους είναι 15000m, 18000m και 20000m.

Όπως φαίνεται στο σχήμα και αναμένεται από τη σχέση (6) οι διαφορετικές τιμές του x_0 και του R δεν επηρεάζουν τις τιμές του X_c αντίθετα επηρεάζουν τις τιμές του Y_c όπως αναμένεται και από τη

σχέση (8). Επίσης η τιμή του q , κατά συνέπεια και του Δs , επηρεάζει την έκταση της περιοχής με προβληματική απορροή. Αν θεωρηθεί σαν τέτοια η περιοχή που χαρακτηρίζεται από $\rho_{x,y} < 0.5\%$ τότε το πρόβλημα δεν περιορίζεται στον υπολογισμό των σημείων μηδενικής κλίσης αλλά είναι χρήσιμος ο εντοπισμός ολόκληρων περιοχών. Μια περισσότερο ενδελεχής μελέτη του ζητήματος της απορροής μπορεί να γίνει εξετάζοντας αναλυτικά τη σχέση (1).

3 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

Στο σύστημα συντεταγμένων, που προαναφέραμε, με τετμημένη x την απόσταση από την αρχή της κλωθοειδούς και τεταγμένη y την απόσταση από τον άξονα του δρόμου, θα μελετηθεί η συνάρτηση $\rho_{x,y}$ ώστε να υπολογιστεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τα οποία χαρακτηρίζονται από μία συγκεκριμένη τιμή συνισταμένης κλίσης. Αν στην σχέση (5) γίνει η παρακάτω αντικατάσταση:

$$B = s_0 + \frac{x_0}{R} \quad (9)$$

όπου B μια σταθερά που αντιπροσωπεύει την κλίση στην αρχή της οριζόντιας καμπύλης, αυτή γράφεται με απλούστερη μορφή, όπως πιο κάτω:

$$s_x = B + \frac{x}{R} \quad (10)$$

Κάνοντας επίσης την αντικατάσταση:

$$C = \frac{q + q_0}{L} \quad (11)$$

όπου C μία σταθερά που αντιπροσωπεύει τη μεταβολή της επίκλισης ανά μονάδα μήκους, προκύπτουν απλούστερες σχέσεις. Συγκεκριμένα η σχέση (2), που περιγράφει την πρόσθετη κλίση οριογραμμών, παίρνει τη μορφή:

$$\Delta s_y = Cy \quad (12)$$

και η σχέση (3), που περιγράφει την επίκλιση, μετασχηματίζεται στην παρακάτω:

$$q_x = -q_0 + Cx \quad (13)$$

Χρησιμοποιώντας όλες τις παραπάνω σχέσεις, η συνισταμένη κλίση οδοστρώματος, που περιγράφεται αρχικά από την (1), γράφεται όπως πιο κάτω:

$$\rho_{x,y} = \sqrt{\left(B + \frac{x}{R} + Cy\right)^2 + (-q_0 + Cx)^2} \quad (14)$$

Η παράσταση αυτή αναλύεται σε:

$$\rho_{x,y}^2 = B^2 + \left(\frac{x}{R}\right)^2 + C^2 y^2 + q_0^2 + C^2 x^2 + 2\frac{B}{R}x + 2BCy + 2\frac{C}{R}xy - 2q_0Cx \quad (15)$$

και κάνοντας τις πράξεις προκύπτει:

$$\rho_{x,y} = \sqrt{\left(\frac{1}{R^2} + C^2\right)x^2 + C^2y^2 + 2\left(\frac{B}{R} - q_0C\right)x + 2BCy + 2\frac{C}{R}xy + B^2 + q_0^2} \quad (16)$$

Για να διερευνήσουμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων στα οποία η προηγούμενη παράσταση έχει συγκεκριμένη τιμή χρειάζεται να μελετήσουμε μια εξίσωση της μορφής:

$$\rho_{x,y}^2 = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = \rho_0^2 \quad (17)$$

όπου ρ_0 η συγκεκριμένη τιμή της συνισταμένης κλίσης. Πρόκειται για δευτεροβάθμια εξίσωση το γράφημα της οποίας ονομάζεται κωνική τομή. Αυτή η εξίσωση εμπεριέχει μία τετραγωνική μορφή (Μαλιάκας, ΕΑΠ) και μπορεί να γραφεί:

$$x^T Ax + Dx + \zeta = \rho_0^2 \quad (18)$$

όπου τα x , A , D είναι πίνακες της μορφής:

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad D = (\delta \varepsilon) \quad (19)$$

Τα στοιχεία των πινάκων, με βάση τις σχέσεις (16) και (17), είναι:

$$a = \frac{1}{R^2} + C^2, \quad \beta = \frac{C}{R}, \quad \gamma = C^2, \quad \delta = 2\left(\frac{B}{R} - q_0C\right), \quad \varepsilon = 2BC, \quad \zeta = B^2 + q_0^2 \quad (20)$$

Για να απαλειφθεί ο όρος xy της (17) χρειάζεται περιστροφή των αξόνων. Η διαδικασία λέγεται διαγωνοποίηση της τετραγωνικής μορφής ή διαγωνοποίηση του πίνακα A και περιγράφεται στη συνέχεια. Πρώτα υπολογίζονται οι ιδιοτιμές του πίνακα A :

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} a - \lambda & \beta \\ \beta & \gamma - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)(\gamma - \lambda) - \beta^2 \quad (21)$$

αυτή η παράσταση μπορεί να γραφεί:

$$|A - \lambda I_2| = \lambda^2 - (\alpha + \gamma)\lambda + \alpha\gamma - \beta^2 \quad (22)$$

και χρησιμοποιώντας τις τιμές από τις σχέσεις (20) προκύπτει:

$$|A - \lambda I_2| = \lambda^2 - \left(\frac{1}{R^2} + 2C^2\right)\lambda + C^4 \quad (23)$$

Η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης ως προς λ είναι:

$$\Delta = \left(\frac{1}{R^2} + 2C^2\right)^2 - 4C^4 = \frac{1}{R^4}(1 + 4C^2R^2) \quad (24)$$

Και οι λύσεις της εξίσωσης και ιδιοτιμές του πίνακα A είναι:

$$\lambda_1 = C^2 + \frac{1 + \sqrt{1 + 4C^2R^2}}{2R^2}, \quad \lambda_2 = C^2 + \frac{1 - \sqrt{1 + 4C^2R^2}}{2R^2} \quad (25)$$

Για $C > 0$ είναι εμφανές ότι $\lambda_1 > 0$, αποδεικνύεται επίσης ότι και $\lambda_2 > 0$ και έτσι το γινόμενο $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ που είναι η συνθήκη ώστε η κωνική τομή η οποία προαναφέρθηκε να είναι έλλειψη (Μαλιάκας, ΕΑΠ). Χρειάζεται ο προσδιορισμός των ακτίνων της. Το κέντρο της έλλειψης μπορεί να θεωρηθεί γνωστό από τις εξισώσεις (6) και (8) αν γίνει η παραδοχή ότι το σημείο που μηδενίζεται η συνισταμένη κλίση είναι μια εκφυλισμένη μορφή έλλειψης με μηδενικές ακτίνες. Για την απλοποίηση των προηγούμενων σχέσεων, που δίνουν τις ιδιοτιμές, γίνεται η επόμενη αντικατάσταση:

$$F = \sqrt{1 + 4C^2R^2} \quad (26)$$

και αυτές γράφονται:

$$\lambda_1 = C^2 + \frac{1 + F}{2R^2}, \quad \lambda_2 = C^2 + \frac{1 - F}{2R^2} \quad (27)$$

Από την εξίσωση:

$$(A - \lambda I_2)x = 0 \quad (28)$$

για τις προηγούμενες ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 προκύπτουν τα ιδιοδιανύσματα. Για $\lambda = \lambda_1$ έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \alpha - \lambda_1 & \beta \\ \beta & \gamma - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

από την οποία προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα της μορφής:

$$\begin{pmatrix} u \\ \frac{F-1}{2RC}u \end{pmatrix} \quad (30)$$

ενώ για $\lambda = \lambda_2$ προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα της μορφής:

$$\begin{pmatrix} -v \\ \frac{F+1}{2RC}v \end{pmatrix} \quad (31)$$

Ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων είναι:

$$\begin{pmatrix} u & -v \\ \frac{F-1}{2RC}u & \frac{F+1}{2RC}v \end{pmatrix} \quad (32)$$

ο οποίος για να είναι ορθοκανονικός πρέπει:

$$\begin{pmatrix} u & -v \\ \frac{F-1}{2RC}u & \frac{F+1}{2RC}v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & \frac{F-1}{2RC}u \\ -v & \frac{F+1}{2RC}v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

δηλαδή:

$$u^2 + v^2 = 1, \quad \frac{F-1}{2RC}u^2 - \frac{F+1}{2RC}v^2 = 0 \quad \text{ή} \quad u^2 - v^2 = \frac{1}{F} \quad (34)$$

το οποίο οδηγεί στον πίνακα:

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{F+1}{2F}} & -\sqrt{\frac{F-1}{2F}} \\ \frac{F-1}{2RC}\sqrt{\frac{F+1}{2F}} & \frac{F+1}{2RC}\sqrt{\frac{F-1}{2F}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & -P_2 \\ \frac{F-1}{2RC}P_1 & \frac{F+1}{2RC}P_2 \end{pmatrix} \quad (35)$$

όπου:

$$P_1 = \sqrt{\frac{F+1}{2F}}, \quad P_2 = \sqrt{\frac{F-1}{2F}} \quad (36)$$

Ο πίνακας P είναι τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Η περιστροφή των αξόνων που προαναφέρθηκε γίνεται αν στην τετραγωνική μορφή της εξίσωσης (18) κάνουμε την αντικατάσταση:

$$x = P y \quad (38)$$

όπου ο x δίνεται στη (19) και ο y είναι πίνακας της μορφής:

$$y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (39)$$

Η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$(P y)^T A (P y) + D(P y) + \zeta = \rho_0^2 \quad (40)$$

ή διαφορετικά:

$$y^T (P^T A P) y + (D P) y + \zeta = \rho_0^2 \quad (41)$$

Έτσι στο νέο σύστημα αξόνων δεν υπάρχει ο όρος του γινομένου των μεταβλητών $x' y'$ και έχουμε:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \delta' x' + \varepsilon' y' + \zeta = \rho_0^2 \quad (42)$$

η οποία μπορεί να γραφεί:

$$\lambda_1 \left(x'^2 + 2 \frac{\delta'}{2\lambda_1} x' \right) + \lambda_2 \left(y'^2 + 2 \frac{\varepsilon'}{2\lambda_2} y' \right) + \zeta = \rho_0^2 \quad (43)$$

όπου τα δ' και ε' προκύπτουν από τον γινόμενο των πινάκων DP και δίνονται από τις σχέσεις:

$$\delta' = \delta P_{11} + \varepsilon P_{21}, \quad \varepsilon' = \delta P_{12} + \varepsilon P_{22} \quad (44)$$

Τα $P_{11}, P_{12} \dots$ είναι τα στοιχεία του πίνακα P που υπολογίστηκε προηγουμένως, σχέση (35). Στη συνέχεια αντικαθιστώντας έχουμε για το δ' :

$$\delta' = 2 \left(\frac{B}{R} - q_0 C \right) P_1 + 2BC \frac{F-1}{2RC} P_1 \quad (45)$$

και για το ε' :

$$\varepsilon' = -2 \left(\frac{B}{R} - q_0 C \right) P_2 + 2BC \frac{F+1}{2RC} P_2 \quad (46)$$

Κάνοντας τις πράξεις έχουμε για το δ' :

$$\delta' = \frac{BP_1}{R} (F+1) - 2q_0 CP_1 \quad (47)$$

και για το ε' :

$$\varepsilon' = \frac{BP_2}{R} (F-1) + 2q_0 CP_2 \quad (48)$$

Η εξίσωση (43) γράφεται:

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{\delta'}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{\varepsilon'}{2\lambda_2} \right)^2 = \lambda_1 \left(\frac{\delta'}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(\frac{\varepsilon'}{2\lambda_2} \right)^2 - \zeta + \rho_0^2 \quad (49)$$

Αποδεικνύεται, κάνοντας τις πράξεις, ότι:

$$\frac{\delta'^2}{4\lambda_1} + \frac{\varepsilon'^2}{4\lambda_2} - \zeta = 0 \quad (50)$$

και έτσι η (49) απλοποιείται όπως πιο κάτω:

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{\delta'}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{\varepsilon'}{2\lambda_2} \right)^2 = \rho_0^2 \quad (51)$$

Αντικαθιστώντας (πρόκειται για μετατόπιση αξόνων) με δύο νέες μεταβλητές:

$$x'' = x' + \frac{\delta'}{2\lambda_1}, \quad y'' = y' + \frac{\varepsilon'}{2\lambda_2} \quad (52)$$

θα έχουμε την εξίσωση (51) στη μορφή:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = \rho_0^2 \quad (53)$$

η οποία γράφεται:

$$\frac{x''^2}{\left(\frac{\rho_0}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\frac{\rho_0}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2} = 1 \quad (54)$$

δηλαδή εξίσωση έλλειψης της μορφής:

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1 \quad (55)$$

με ημιάξονες:

$$a = \frac{\rho_0}{\sqrt{\lambda_1}} \quad \text{και} \quad b = \frac{\rho_0}{\sqrt{\lambda_2}} \quad (56)$$

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων με σταθερή τιμή (ρ_0) της συνισταμένης κλίσης είναι μια έλλειψη με ημιάξονες που δίνονται από τις σχέσεις (56). Η έλλειψη που έχει προκύψει έχει περιστραφεί σε σχέση με τον άξονα του δρόμου σύμφωνα με την εξίσωση (38) και στη συνέχεια έχει μετατοπιστεί στο νέο σύστημα αξόνων κατά $\Delta x'$ και κατά $\Delta y'$, όπως αυτά εκφράζονται από τις εξισώσεις (52). Η εξίσωση (38) γράφεται:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & -P_2 \\ \frac{F-1}{2RC}P_1 & \frac{F+1}{2RC}P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (57)$$

και η εξίσωση (52) γράφεται:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\delta'}{2\lambda_1} \\ \frac{\varepsilon'}{2\lambda_2} \end{pmatrix} \quad (58)$$

που αντιστρέφοντας την έχουμε:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\delta'}{2\lambda_1} \\ -\frac{\varepsilon'}{2\lambda_2} \end{pmatrix} \quad (59)$$

Από τις (57) και (59) προκύπτει:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & -P_2 \\ \frac{F-1}{2RC}P_1 & \frac{F+1}{2RC}P_2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\delta'}{2\lambda_1} \\ -\frac{\varepsilon'}{2\lambda_2} \end{pmatrix} \right\} \quad (60)$$

και κάνοντας τις πράξεις έχουμε:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & -P_2 \\ \frac{F-1}{2RC}P_1 & \frac{F+1}{2RC}P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\delta'P_1}{2\lambda_1} + \frac{\varepsilon'P_2}{2\lambda_2} \\ -\frac{F-1}{2RC}P_1\frac{\delta'}{2\lambda_1} - \frac{F+1}{2RC}P_2\frac{\varepsilon'}{2\lambda_2} \end{pmatrix} \quad (61)$$

δηλαδή στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων η έλλειψη έχει κέντρο:

$$X_c = -\frac{\delta'P_1}{2\lambda_1} + \frac{\varepsilon'P_2}{2\lambda_2}, \quad Y_c = -\frac{F-1}{2RC}P_1\frac{\delta'}{2\lambda_1} - \frac{F+1}{2RC}P_2\frac{\varepsilon'}{2\lambda_2} \quad (62)$$

και είναι στραμμένη κατά γωνία θ που προκύπτει από τη σχέση:

$$\cos \theta = P_1 \quad (63)$$

Κάνοντας τις αντικαταστάσεις των μεγεθών και τις πράξεις οι σχέσεις (62) απλοποιούνται σε:

$$X_c = \frac{q_0}{q+q_0}L, \quad Y_c = -\frac{L}{q+q_0} \left(s_0 + \frac{x_0}{R} + \frac{q_0}{q+q_0} \frac{L}{R} \right) \quad (64)$$

Οι σχέσεις αυτές ταυτίζονται με τις σχέσεις (6) και (8), που δίνουν τις συντεταγμένες του σημείου μηδενισμού της συνισταμένης κλίσης. Το κέντρο της έλλειψης, που αποτελεί τον γεωμετρικό τόπο των σημείων με συγκεκριμένη τιμή συνισταμένης κλίσης, δεν εξαρτάται από την συγκεκριμένη τιμή (ρ_0). Αντίθετα οι ακτίνες της έλλειψης εξαρτώνται από αυτήν, ευθέως ανάλογες του ρ_0 , όπως προκύπτει από τις σχέσεις (56). Σε πρώτη προσέγγιση οι ιδιοτιμές λ_1, λ_2 (σχέσεις 25) πλησιάζουν την τιμή C^2 . Έτσι και με βάση τις σχέσεις (56) η έλλειψη είναι σχεδόν κύκλος με ακτίνα αντιστρόφως ανάλογη της σταθεράς C , δηλαδή της μεταβολής της επίκλισης ανά μονάδα μήκους.

Παραδείγματα τέτοιων ελλείψεων φαίνονται στο Σχήμα 2. Στους δρόμους στο αριστερό τμήμα του σχήματος η πρόσθετη κλίση οριογραμμών είναι $\Delta s = 0.75\%$ διπλάσια αυτής των δρόμων του δεξιού τμήματος με $\Delta s = 0.375\%$. Ο ίδιος λόγος (2:1) εμφανίζεται συγκρίνοντας τις αντίστοιχες μεταβλητές C (σχέση 11). Αυτό οδηγεί σε διπλάσια ακτίνα των σχηματισμών στο δεξί τμήμα του σχήματος σε σχέση με αυτούς του αριστερού τμήματος.

4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία έγινε διερεύνηση του προβλήματος της απορροής των ομβρίων σε κρίσιμες για την ασφάλεια περιοχές των οδικών χαράξεων, όπως είναι οι περιοχές συναρμογής αντίρροπων επικλίσεων, όταν μάλιστα αυτές συνδυάζονται με κοίλη καμπύλη μηκοτομής με τέτοιο τρόπο ώστε η πρόσθετη κλίση οριογραμμών να έχει αντίθετο πρόσημο από την κατά μήκος κλίση. Μελετήθηκε γι' αυτόν το σκοπό η συνάρτηση της συνισταμένης κλίσης στις συγκεκριμένες περιοχές του οδοστρώματος.

Με βάση την ανάλυση προέκυψε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων με συγκεκριμένη τιμή συνισταμένης κλίσης, ίση με ρ_0 , είναι μία έλλειψη. Το κέντρο της έλλειψης είναι το σημείο μηδενισμού της συνισταμένης κλίσης, που ταυτίζεται με το σημείο ταυτόχρονου μηδενισμού της επίκλισης και της σύνθετης κατά μήκος κλίσης. Το σημείο αυτό μπορεί να είναι πραγματικό (βρίσκεται στα όρια του οδοστρώματος) ή όχι (βρίσκεται σε μία θεωρητική θέση).

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων με συνισταμένη κλίση μικρότερη από ρ_0 είναι ο εσωτερικός χώρος μιας έλλειψης. Αν ως τιμή του ρ_0 επιλεγεί μια οριακή (π.χ. 0.5%) τότε η πραγματική προβληματική περιοχή θα είναι το τμήμα του εσωτερικού της αντίστοιχης έλλειψης, το οποίο βρίσκεται ανάμεσα στον άξονα του δρόμου και την εξωτερική οριογραμμή. Η έκταση (το εμβαδόν) αυτή της περιοχής είναι ανάλογη του τετραγώνου της τιμής ρ_0 που θα επιλεγεί και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μεταβολής της επίκλισης ανά μονάδα μήκους.

Για να διασφαλιστεί η καλή απορροή, στην περιοχή που μελετήθηκε αναλυτικά στην εργασία, είναι απαραίτητο η κατά μήκος κλίση της οδού να είναι μεγαλύτερη από την πρόσθετη κλίση των οριογραμμών, όπως προτείνεται από τις ΟΜΟΕ. Θεωρείται μάλιστα αναγκαίο ή καλύτερο η διαφορά $s-\Delta s$ να είναι τουλάχιστον 0,5%.

Η ίδια μαθηματική ανάλυση, με ανάλογα αποτελέσματα, μπορεί να εφαρμοστεί και όταν η περιοχή της οριζόντιας καμπύλης συνδυάζεται με κυρτή καμπύλη στη μηκοτομή με τέτοιο τρόπο ώστε η πρόσθετη κλίση οριογραμμών να έχει ίδιο πρόσημο με την κατά μήκος κλίση. Όμως σ' εκείνη την περίπτωση δεν είναι απαραίτητο η κατά μήκος κλίση της οδού να είναι μεγαλύτερη από την πρόσθετη κλίση των οριογραμμών. Αυτό οφείλεται στο ότι σε καμία από τις δύο οριογραμμές του οδοστρώματος δεν είναι δυνατόν να εμφανιστεί αντίθετη κλίση από την κατά μήκος κλίση του άξονα περιστροφής της οδού.

Τα παραπάνω αποτελέσματα της εργασίας θεωρείται ότι είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στον μελετητή έργων οδοποιίας, δίνοντας μια πιο καθαρή εικόνα του προβλήματος της απορροής των ομβρίων και συμβάλλοντας στον σχεδιασμό ασφαλέστερων και οικονομικότερων οδικών έργων.

5 ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Κανελλαΐδης, Γ., Μαλέρδος, Γ., Γλάρος, Γ. (2002). *Σημειώσεις για τον Γεωμετρικό Σχεδιασμό των Οδών*. Αθήνα.

Μαλιάκας, Μ., Αδάμ, Μ., *Παραδείγματα και Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας*. Εναλλακτικό Διδακτικό Υλικό, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, edu.eap.gr.

ΟΜΟΕ-Χ (2001). *Οδηγίες Μελετών Οδικών Έργων. Τεύχος 3: Χαράξεις*. ΥΠΕΧΩΔΕ, Αθήνα.